Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas VI (MA-2113)
1^{er} Examen Parcial (35 %)
Verano 2008

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (12 pts.) Considere $\mathbf{F}(r) = (6xy + z^3, 3x^2 - z, 3xz^2 - y)$
   (a) Demostrar que $\mathbf{F}$ es irrotacional.
   (b) Hallar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

2. (11 pts.) Sea S la superficie cuya ecuación es de la forma $z = f(x, y)$, y sea R la proyección de discha superficie sobre el plano xy.
   (a) Demostrar que el área de S viene dada por
   $$\text{área}(S) = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$
   (b) Usar dicha fórmula para calcular el área de la porción del plano $x + y + z = 1$ que queda dentro del cilindro elíptico $x^2 + 2y^2 = 1$.

3. (12 pts.) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos funciones escalares con (al menos) las dos primeras derivada continuas en cada punto $\mathbb{R}^3$.
   (a) Demostrar que $\text{div}(f\nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + (f\nabla^2 g)$. ¿Cómo queda dicha identidad si cambiamos f con g? (**Ayuda**: $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ es el **laplaciano** de u)
   (b) Usar la parte anterior para demostrar la **identidad de Green:**
   $$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot dS = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV$$
   donde V es un sólido tal que $\partial V = S$, y S es regular.